Търсим $f(x,y)=\sum_{a=1}^{x}\sum_{b=1}^{y}\varphi(gcd(a,b))$

Нека с cnt(d) означаваме броя двойки (a, b) в горната сума, за които gcd(a, b) = d. Тогава f(x, y) може да се запише и като $\sum_{d=1}^{min(x,y)}\varphi(d)cnt(d)$

Да запишем $\varphi(d)$ като $\sum_{t/d} g(t)$, т.е като сума от g по всички делители на d (в края ще покажем как да намерим g). Заместваме в израза за f(x, y) и получаваме $f(x,y)=\sum_{d=1}^{min(x,y)} cnt(d)\sum_{t/d} g(t)=\sum_{t} g(t)\sum_{t/d} cnt(d)$.
$\sum_{t/d} cnt(d)$ реално е броят двойки (a, b) в оригиналната сума, най-големият общ делител на които се дели на t. Това се пресмята лесно - $floor(a/t)*floor(b/t)$. Окончателно $f(x,y)=\sum_{t} g(t) floor(a/t) floor(b/t)$.

Остава да се научим да пресмятаме g. Искаме $\varphi(d)=\sum_{t/d} g(t)$, при това $\varphi(d)$ е аритметическа (т.е $\varphi(a*b)=\varphi(a)*\varphi(b)$ при взаимно прости a и b). По формулата на Mobius получаваме $g(d)=\sum_{t/d}\mu(t)\varphi(d/t)$, където μ е функцията на Mobius.

Като финална забележка – т.к. φ,μ,g всичките са аритметически функции, то може да ги сметнем ефективно с нещо като решето на Ератостен. Например, нека трябва да сметнем $\varphi(n)$. Представяме n като p^x*m , т.е. отделяме един от простите делители на n. Тогава $\varphi(n)=\varphi(m)*\varphi(p^x)$, като нещата в дясната страна вече сме ги сметнали (те са строго по-малки от n). Остава да се научим само да обработваме простите числа, но очевидно $\varphi(p)=p-1$.

Сложността са получава O(x lg(x)), може би и по-малка.